Tentamen Dynamische Systemen, 24/jun/2008

- Schrijf op ieder vel je naam en het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat steeds duidelijk zien hoe je aan het antwoord gekomen bent.
- Er zijn drie opgaven. Succes!

Opgave 1 Beschouw een gladde functie $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en daarbij de tweede orde differentiaalvergelijking

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x). \tag{1}$$

Schrijf deze bewegingsvergelijking als een dynamisch systeem met als toestandsruimte het (x, y)-fasevlak, waarbij $y = x'$.

a) Definieer $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ en laat zien dat H een behouden grootheid is, d.w.z., dat langs elke evolutie $\{(x(t), y(t)) \mid t \geq 0\}$ van het dynamisch systeem geldt dat $H' \equiv 0$.

b) Toon aan dat bovenstaand dynamisch systeem geen attractoren kan hebben.

c) Gegeven zijn $V_1(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$ en $V_2(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Schets de grafieken van V_1 en V_2. Omschrijf voor V_1 en V_2 het typische gedrag van het bijbehorende dynamische systeem. Schets de faseportretten.

d) Hoe verandert dit als we vergelijking (1) veranderen tot

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x) - cx', \tag{2}$$

voor een constante $c > 0$? Schets opnieuw de bijbehorende faseportretten.

e) Laat zien dat vergelijking (2) geen periodieke evoluties kan hebben als $c > 0$.

Opgave 2 Toon aan dat voor periodieke en quasi-periodieke evoluties van een dynamisch systeem de dispersie exponent E gelijk is aan 0.

Opgave 3 We beschouwen de afbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

a) Schets de grafieken van f en f^2 (de twee keer geïtereerde).

b) Ontwerp een symbolische dynamica voor f. (Aanwijzing: maak gebruik van het twee-tallig stelsel en bekijk de ruimte van symboolrijen met de symbolen 0 en 1.)

c) Hoe volgt hieruit dat er periodieke punten van f zijn en dichte banen?

d) Gegeven een dichte baan $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) | n \geq 0\}$, toon aan dat de dispersie-exponent E van deze baan de waarde $\ln 2$ heeft.

e) De afbeelding f als boven lijkt op de bekende verdubbelings afbeelding $g : [0,1] \to [0,1]$, gedefinieerd door

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Toon aan dat er desondanks geen diffeomorfisme kan bestaan dat f en g conjugeert.